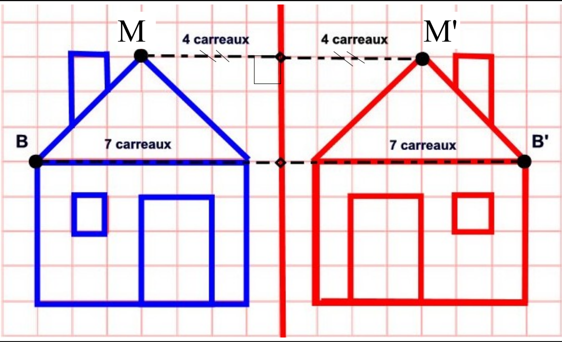
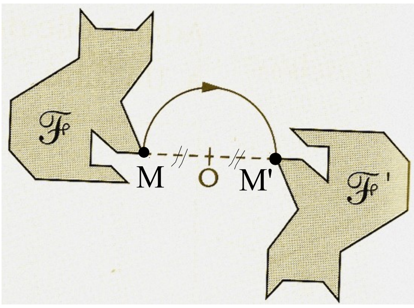
Vecteurs du plan — 2nde

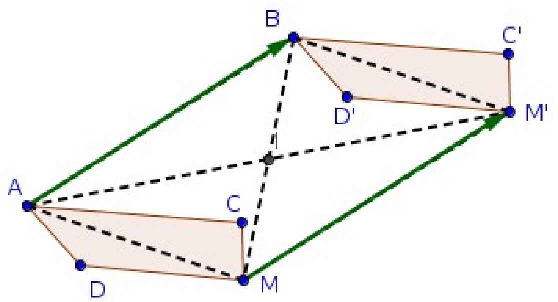
I. Translations et Vecteurs du plan

A. Transformations du plan, je me souviens....

Vous connaissez déjà des transformations du plan : Les *symétries par rapport à un point* et *les symétries par rapport une droite*. Nous allons rencontrer dans ce chapitre de nouvelles transformations du plan, les *translations*, qui transforment les figures en les faisant glisser sans les faire tourner.

symétries par rapport une droite = **symétries axiales** *(pliage)*		Définition 1. Les points M et M' sont ***symétriques par rapport à la droite (d)*** *signifie que* *(d)* est la médiatrice de [MM'].	« M *a pour image M' par la symétrie par rapport à la droite (d)* » se note $M \overset{s_d}{\mapsto} M'$ ou $s_d(M)=M'$
symétries par rapport à un point = **symétries centrales** *(= demi-tour autour du centre)*		Définition 2. M et M' sont ***symétriques par rapport au point O*** *signifie que* O est le milieu de [MM'].	« M *a pour image M' par la symétrie de centre O* » se note $M \overset{s_O}{\mapsto} M'$ ou $s_O(M)=M'$

B. Une nouvelle transformation du plan : Translation et vecteur associé

Translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$	 *Une translation fait glisser la figure sans la faire tourner. On se déplace de la même façon pour aller de M à M' que de A à B.*	Définition 3. M a pour image M' par ***la translation qui transforme A en B*** *signifie que* [AM'] et [BM] ont le même milieu. *Ceci revient à dire que* ABM'M est un parallélogramme, éventuellement aplati.	« M *a pour image M' par la translation de vecteur* $\overrightarrow{AB}$ » se note $M \overset{t_{\overrightarrow{AB}}}{\mapsto} M'$ ou $t_{\overrightarrow{AB}}(M)=M'$

- La ***translation qui transforme A en B*** s'appelle aussi ***translation de vecteur*** $\overrightarrow{AB}$. On la note $t_{\overrightarrow{AB}}$.
- Le ***vecteur*** $\overrightarrow{AB}$ associé à cette translation caractérise le déplacement de A vers B. On le représente par une flèche allant de A à B. A est l'***origine*** du vecteur $\overrightarrow{AB}$ et B son ***extrémité***.

Remarque :De même qu'on utilise souvent une seule lettre (d) pour noter la droite (AB), on utilise souvent une seule lettre pour noter un vecteur. Vous rencontrerez donc souvent $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$.

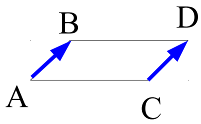
- Exercice(s) 5 et 6 p 310 de Repères ; [TM] Ex 1 à 4 p 310 de Repères, corrigés.
- Exercice(s) 8 p 310 de Repères : Représentant de $\vec{u}$ d'origine A.

C. Égalités vectorielles : Définition et applications

Définition 4. Égalité de deux vecteurs

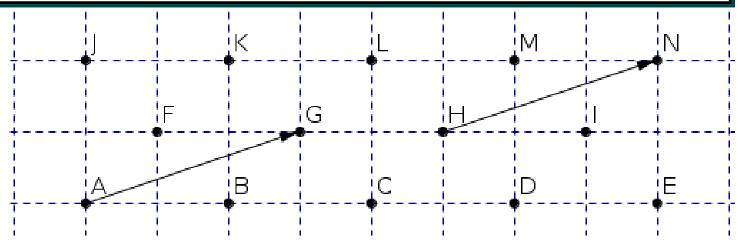
▪ Deux vecteurs sont ***égaux*** lorsqu'ils définissent la même translation d'où

▪ $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ $\Leftrightarrow$ D est l'image de C par la translation qui transforme A en B
$\Leftrightarrow$ [AD] et [BC] ont même milieu
$\Leftrightarrow$ $AB\mathbf{D}C$ est un parallélogramme (éventuellement aplati)



▪ Autrement dit, deux vecteurs sont ***égaux*** lorsqu'ils ont
- la même **direction** *(☝ Cela veut seulement dire portés par des droites parallèles)*
- le même **sens** *(les flèches pointent du même côté)*
- la **même longueur** *(la longueur d'un segment est aussi appelée sa **norme**.)*

♠ Exemple 1. $\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{HN}$



◯ Exercice 2. Compléter

1) $\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{F\ldots}=\overrightarrow{\ldots I}=\ldots.$

2) $\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{B\ldots}=\overrightarrow{\ldots H}=\ldots.$

3) $A \overset{t_{\overrightarrow{AB}}}{\mapsto} \ldots \overset{s_G}{\mapsto} \ldots \overset{t_{\overrightarrow{JF}}}{\mapsto} \ldots$

4) $D \overset{t_{\overrightarrow{AB}}}{\mapsto} \ldots \overset{s_{(DN)}}{\mapsto} \ldots \overset{s_G}{\mapsto} \ldots \overset{t_{\overrightarrow{HM}}}{\mapsto} \ldots$ *(en faire d'autres à l'ardoise?)*

Utilisation des égalités de vecteurs.

P5 ▪ **Caractérisation des parallélogrammes** : $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD} \Leftrightarrow ABDC$ est un parallélogramme.

P6 ▪ **Caractérisation des milieux** : $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow$ B est le milieu de [AC].

P7 ▪ **Caractérisation des points confondus** : $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow B=C \Leftrightarrow$ B et C sont confondus.

D. Vecteur nul

Définition [8]. Le ***vecteur nul*** est le vecteur associé à une translation avec laquelle rien ne bouge donc A est transformé en A, B en B....etc.

Le vecteur nul, noté $\vec{0}$ est donc le vecteur $\overrightarrow{AA}=\overrightarrow{BB}=\overrightarrow{CC}=\ldots=\overrightarrow{ZZ}$

E. Opposé d'un vecteur

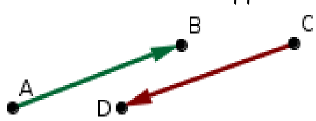
L'***opposé d'un vecteur*** est le vecteur qui correspond à « *la même translation dans l'autre sens*. »

Définition [9].

■ On dit que deux vecteurs sont ***opposés*** lorsqu'ils ont :
- la même direction (*ils sont* colinéaires[1])
- la même longueur
- mais PAS le même sens

■ L'opposé du vecteur $\vec{u}$ se note $-\vec{u}$. L'opposé du vecteur $\overrightarrow{AB}$ se note $-\overrightarrow{AB}$ et on a $-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BA}$

Illustration :
Sur cette figure, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont opposés.



$\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{CD}=+\overrightarrow{DC}$

II. Somme et différence de deux vecteurs

A. Addition de deux vecteurs

On décide de définir ainsi la somme de deux vecteurs :

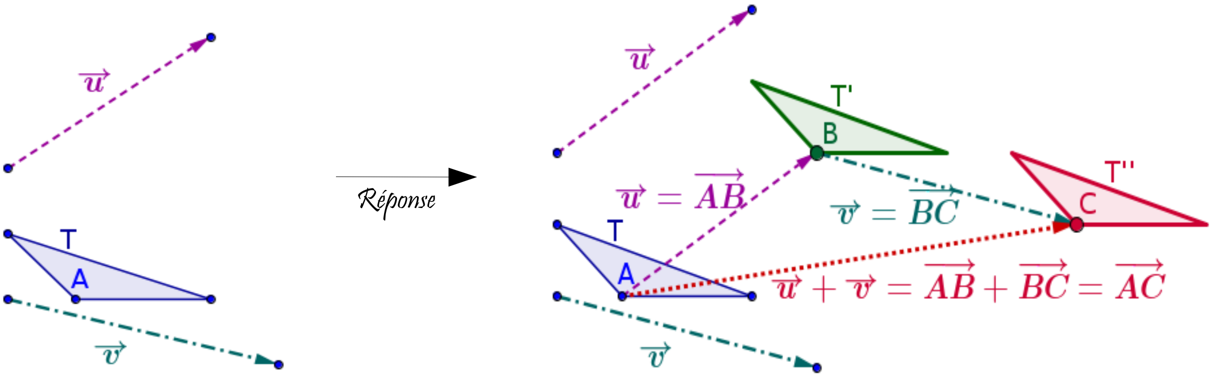
Définition [10]. Effectuer la translation de vecteur $\vec{u}$ suivie de la translation de vecteur $\vec{v}$ revient à effectuer une unique translation dont le vecteur est par définition $\vec{u}+\vec{v}$.

et on regarde ce qui découle de cette définition :

[1] Le mot « parallèles » étant réservé aux droites et aux segments, on a crée le mot « colinéaires » pour les vecteurs.

Activité de découverte 3. Translations successives et somme de vecteurs

Le triangle T a pour image T' par la translation de vecteur $\vec{u}$ et T' a pour image T'' par la translation de vecteur $\vec{v}$. Dessiner T' et T''. Placer sur la figure le point B image de A par la translation de vecteur $\vec{u}$ et C image de B par la translation de vecteur $\vec{v}$.



On en déduit :

Règles d'addition de deux vecteurs [11]. Relation de Chasles et règle du parallélogramme

■ **Somme de deux vecteurs en les mettant « bout à bout » : Relation de Chasles**

Quand les deux vecteurs sont représentés par des flèches dont l'extrémité de l'une est l'origine de l'autre, on utilise la ***Relation de Chasles*** :

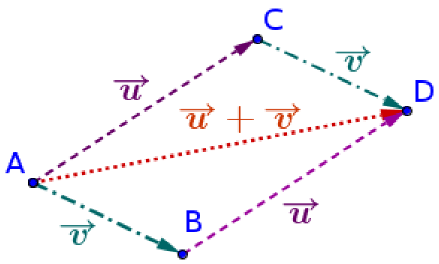
Quels que soient les points A, B et C , $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

Cette égalité permet de transformer une somme de deux vecteurs en un seul vecteur, et réciproquement.

Le corollaire[2] suivant est parfois utile :

■ **Somme de deux vecteurs en prenant des représentants de même origine** :

Quand les deux vecteurs sont représentés par des flèches ayant la même origine, on trace leur somme en construisant un parallélogramme. C'est la ***règle du parallélogramme*** : Quels que soient les points A, B et C , $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$, où D est le point tel que ABDC soit un parallélogramme.



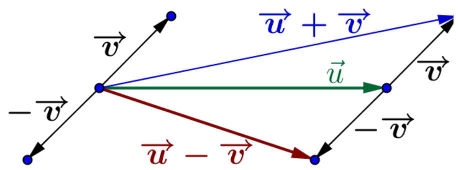
Remarque 12. **Commutativité** : Quels que soient les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$.

Point-méthode 13. *Pour appliquer la relation de Chasles il faut que l'extrémité du premier vecteur soit l'origine du second, qu'il y ait un signe « plus » entre les deux vecteurs (Chasles ne marche pas avec un signe « moins ») et qu'il n'y ait pas de coefficient (sauf si c'est le même) devant les vecteurs.*

B. Soustraction de deux vecteurs :

Définition [14]. Soustraire un vecteur revient à ajouter son opposé. $\vec{u} - \vec{v} \overset{\text{def}}{=} \vec{u} + (-\vec{v})$.

Comme pour les nombres relatifs : Toute soustraction est une addition qui s'ignore....



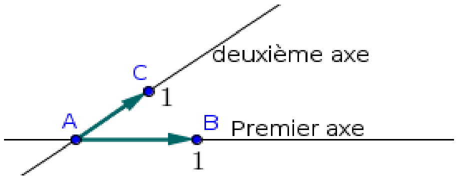
[2] *Un **corollaire** d'une propriété est une conséquence directe de cette propriété.*

III. Coordonnées d'un vecteur

Comme toujours, pour avoir des coordonnées, il faut un repère. Commençons donc par là.

Remarque 15. On avait jusqu'à présent défini les repères du plan par trois points non alignés. On pourra désormais les définir aussi par un point et deux vecteurs non colinéaires[3].

Par exemple, avec trois points A, B et C non alignés, parler du repère (A, B, C) ou du repère $(A, \vec{AB}, \vec{AC})$ *est équivalent, voir figure ci-contre.*



Définition [16]. Les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ sont les coordonnées du point M tel que $\vec{OM} = \vec{u}$.

En pratique 17. Interprétation des coordonnées d'un vecteur comme la mesure du déplacement pour aller de l'origine à l'extrémité. $\vec{u}$ a pour coordonnées $(3;5)$ signifie que pour aller de A à B on se déplace de 3 unités vers la droite (selon le 1er axe) et de 5 unités vers le haut (selon le 2ème axe).

Propriétés. Le plan étant muni d'un repère,

- **P 18.** Deux vecteurs sont égaux ssi[4] ils ont les mêmes coordonnées.
- **P 19.** Les coordonnées de la somme de deux vecteurs est la somme de leurs coordonnées.

Autrement dit, quelque soient les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, $\vec{u}+\vec{v}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \end{pmatrix}$.

Coordonnées d'un vecteur à partir de celles de son origine et de son extrémité [20].
Si A et B ont pour coordonnées respectives (x_A, y_A) et (x_B, y_B) dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ alors $\vec{AB}$ a pour coordonnées $\vec{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$ dans ce même repère. « *Extrémité moins origine* »

IV. Vecteurs colinéaires

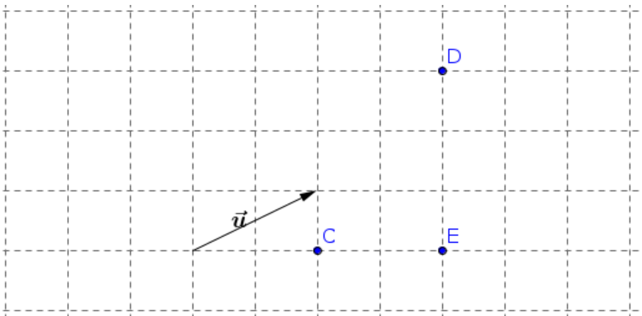
A. Produit d'un vecteur par un réel

■ **Définition [21].** Soit λ [*se lit lambda*] un nombre réel et $\vec{u}$ un vecteur.
On appelle ***produit de λ par*** $\vec{u}$ le vecteur noté $\lambda\vec{u}$ caractérisé par :
◊ La même direction que $\vec{u}$;
◊ Le même sens que $\vec{u}$ si λ est positif, le sens contraire si λ est négatif ;
◊ Une ***norme*** (=longueur) égale à λ fois la norme de $\vec{u}$ si $\lambda > 0$ et égale à $-\lambda\ (>0)$ fois la norme de $\vec{u}$ si $\lambda < 0$.

Exemple 4.

1) Placer C' tel que $\vec{CC'} = 2\vec{u}$; placer D' tel que $\vec{DD'} = -3\vec{u}$ et placer E' tel que $\vec{EE'} = -\frac{1}{2}\vec{u}$

2) *Compléter* $\|\vec{CC'}\| = \ldots\ldots \|\vec{u}\|$ où $\|\vec{u}\|$ désigne la norme de $\vec{u}$. $\|\vec{DD'}\| = \ldots\ldots \|\vec{u}\|$ et $\|\vec{EE'}\| = \ldots\ldots \|\vec{u}\|$

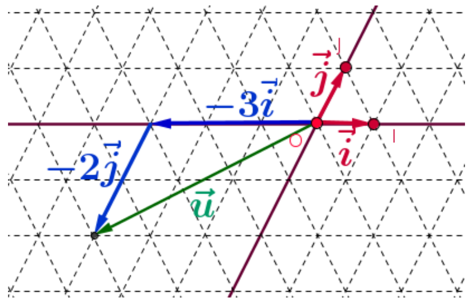


---

[3] *Le mot « parallèles » étant réservé aux droites et aux segments, on a crée le mot « colinéaires » pour les vecteurs. C'est un peu plus court à écrire que « vecteurs de même direction » et cela veut dire la même chose.*

[4] *ssi = « si et seulement si » = « équivaut à » = ⇔*

■ **Reformulation de la définition des coordonnées d'un vecteur [22].** On dit que $\vec{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ ssi $\vec{u}=x\,\vec{i}+y\,\vec{j}$. On note $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.



♠ Exemple ci-contre : $\vec{u}=-3\,\vec{i}-2\,\vec{j}$ d'où $\vec{u}\begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}$.

■ **Effet de la multiplication par un nombre sur les coordonnées [23].** Soit λ un nombre.

Si $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ alors $\lambda\vec{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} \lambda\,x \\ \lambda\,y \end{pmatrix}$ dans ce même repère.

○ Exemple 5. $A(2;-3), B(-4;5)$ et $C(-5;-7)$. $\vec{u}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.

1) Déterminer les coordonnées de $\vec{u}$.
2) Déterminer les coordonnées de D tel que $\overrightarrow{CD}=-2\,\overrightarrow{AB}$

B. Vecteurs colinéaires

Définition et caractérisation [24].

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont ***colinéaires***

◊ signifie par définition qu'ils ont la même direction,

◊ **ce qui équivaut à dire** que l'un est le produit de l'autre par un réel, autrement dit, qu'il existe un réel λ tel que $\vec{u}=\lambda\,\vec{v}$ ou $\vec{v}=\lambda\,\vec{u}$;

◊ **ce qui équivaut à dire** que leurs coordonnées sont proportionnelles, autrement dit, si $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires ssi $xy'-yx'=0$.

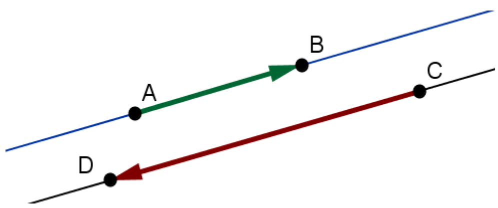
Dessiner un tableau de proportionnalité avec λ et $1/\lambda$ comme coefficients de proportionnalité.

○ Exemple 6. $\vec{u}\begin{pmatrix} 3-\sqrt{2} \\ 2+3\sqrt{2} \end{pmatrix}$; $\vec{v_1}\begin{pmatrix} -21+7\sqrt{2} \\ -14-21\sqrt{2} \end{pmatrix}$; $\vec{v_2}\begin{pmatrix} -2+3\sqrt{2} \\ 6+2\sqrt{2} \end{pmatrix}$; $\vec{v_3}\begin{pmatrix} 6-3\sqrt{2} \\ 6+9\sqrt{2} \end{pmatrix}$ et $\vec{v_4}\begin{pmatrix} 7 \\ 12+11\sqrt{2} \end{pmatrix}$.

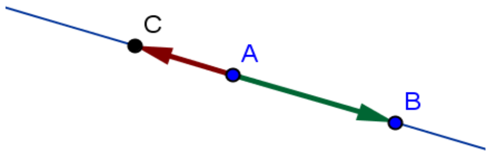
Lesquels parmi ces vecteurs sont colinéaires à $\vec{u}$?

C. Applications à la géométrie

▪ **P 25. Démontrer le parallélisme :** Les droites (AB) et (CD) sont parallèles ssi $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.



▪ **P 26. Démontrer l'alignement :** Les points A, B et C sont alignés ssi $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.



Pour ceux qui n'auraient pas les yeux bien ouverts, la différence entre ces deux cas est que dans le second les vecteurs ont un point en commun.

Dans P26, [AB] et [AC] sont donc des droites parallèles (d'après P25) avec un point commun (qui est A) donc les droites (AB) et (AC) sont confondues, càd[5] que c'est la même droite.

[5] *càd = c'est à dire.*

Table of Contents

Corrigé des exercices du cours

♠ Corrigé de l'exemple 5. $\overrightarrow{AB}(-6\,;8)$ $\vec{u}\left(-2\,;\frac{8}{3}\right)$ $\vec{D}(7\,;-23)$

♠ Corrigé de l'exemple 6. $\vec{v}_1=-7\vec{u}$; $\vec{v}_2=\sqrt{2}\vec{u}$; $\vec{v}_3$ non colinéaire à $\vec{u}$ et $\vec{v}_4=(3+\sqrt{2})\vec{u}$.

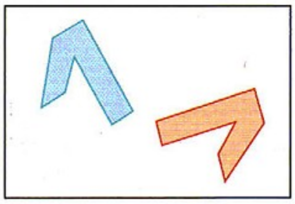
Activités d'introduction sur les vecteurs en 2nde

Exercice 1. *Je me souviens*

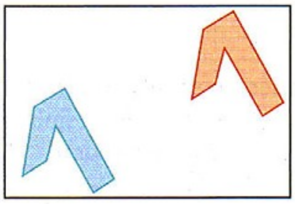
1 Avec les transformations

Dans chaque cas, préciser si une transformation connue peut permettre d'associer à la figure bleue la figure rouge.

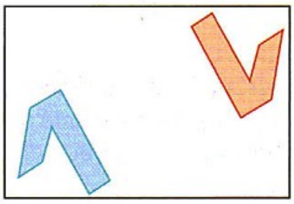
a.



b.



c.



2 Avec des coordonnées

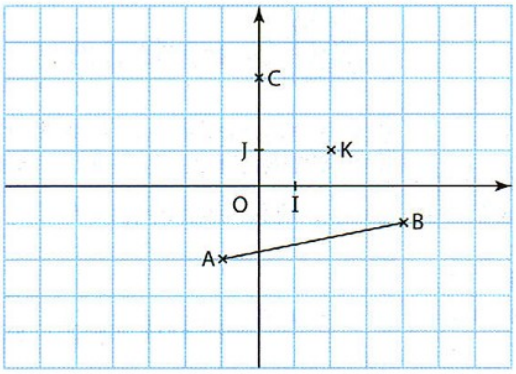
1. Par le calcul

Soit $A(-1;3)$, $B(4;-5)$, $C(1;2)$ et $D(2;-4)$.
Les segments [AB] et [CD] ont-ils le même milieu ? Que peut-on en déduire ?

2. Par lecture graphique

Dans le repère (O,I,J), quelles sont, par lecture graphique, les coordonnées des points :

a. D tel que ABCD soit un parallélogramme ;
b. E tel que ABEC soit un parallélogramme ;
c. F tel que [AB] et [OF] aient le même milieu ;
d. G tel que [CG] et [BK] aient le même milieu.



3 Avec la proportionnalité

Ces tableaux sont-ils des tableaux de proportionnalité ?

a.

2	-8
5	-20

b.

3	7
-6	-14

c.

$1-\sqrt{2}$	-1
1	$1+\sqrt{2}$

d.

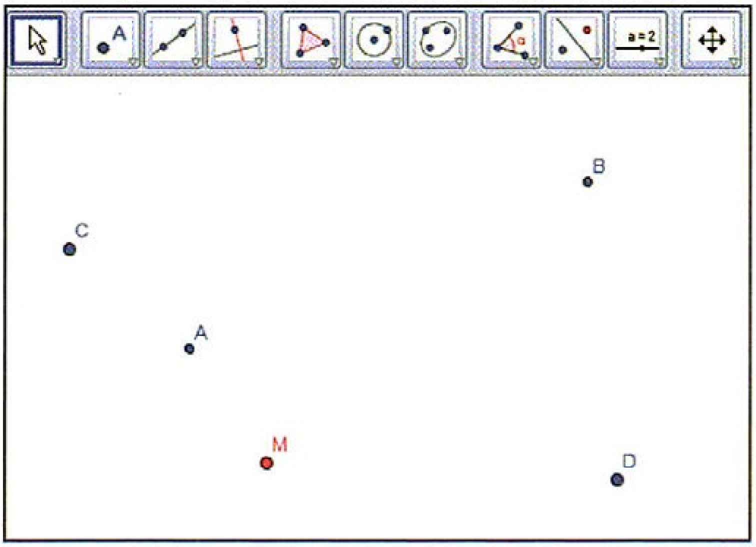
7	19
3	8

e.

12	-25
$-\frac{4}{5}$	$\frac{5}{3}$

Exercice 2. *TICE et Vecteurs I : Un nouvel outil*

a) Avec un logiciel de géométrie dynamique, placer des points libres A, B, C, D, M.



b) Par définition, **la translation qui transforme A en B** associe, à tout point M du plan, le point N tel que [BM] et [AN] aient le même milieu.

- Construire ce point N. Quelle est la nature du quadrilatère ABNM ?
- Déplacer le point M sur la droite (AB). Que constate-t-on ?

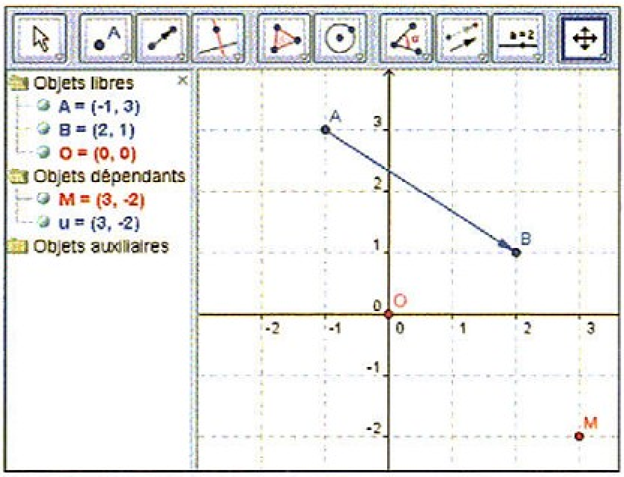
c) Le logiciel possède une instruction « Translation », mais pour l'utiliser il faut créer d'abord **un vecteur**.
Créer le vecteur $\overrightarrow{AB}$ puis créer le point M′ associé au point M par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$. Que constate-t-on ?

d) Créer le vecteur $\overrightarrow{CD}$ et le point M_1 associé à M par la translation de vecteur $\overrightarrow{CD}$.

e) Déplacer les points C et D de façon que M_1 et M′ soient confondus. Lorsque cela se produit, conjecturer la nature du quadrilatère ABCD. Démontrer cette conjecture.

Exercice 3. *TICE et Vecteurs II : Coordonnées d'un vecteur*

a) Avec le logiciel de géométrie GeoGebra, faire la figure ci-contre où M est le point associé à l'origine O du repère par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.



b) Noter dans la « Fenêtre Algèbre » que les coordonnées du vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ sont les mêmes que celles du point M.
Créer un autre vecteur $\overrightarrow{CD}$ de coordonnées $(3 ; -2)$.

c) Créer un point E tel que le vecteur $\overrightarrow{AE}$ ait pour coordonnées $(-5 ; 2)$.

d) Créer un point F tel que le vecteur $\overrightarrow{AF}$ ait pour coordonnées $(-2 ; -4)$.

e) Placer le point N de coordonnées $(10 ; -3)$ et construire le point N′ tel que $\overrightarrow{NN'} = \overrightarrow{AB}$.

f) On donne les points $R(-1 ; -4)$ et $S(-4 ; 6)$.
Conjecturer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{RS}$. Vérifier la conjecture en plaçant R et S.

Discussion profs

Rudolph B : On ne peut éviter que l'enseignement du lycée s'appuie sur l'enseignement du collège et puisse reprendre les mêmes erreurs.
Ainsi la définition des vecteurs balancée par Moisan en réponse à la pétition demandant un enseignement de géométrie cohérent. Indépendamment de la définition des translations dont on ne comprend pas ce qu'elle signifie (une lubie de mathématicien peut-être !!!), une question se pose : Soit AB un segment orienté, alors l'image d'un point M par la translation de vecteur AB est le point N tel que ABNM soit un parallélogramme. Soit alors un point P, Q l'image du point P par la translation de vecteur AB, R l'image du point P par la translation de vecteur MN, est-ce que les points Q et P coïncident ? Sans postulat des parallèles, on ne peut le montrer. On retrouve ici la même erreur qu'au collège.