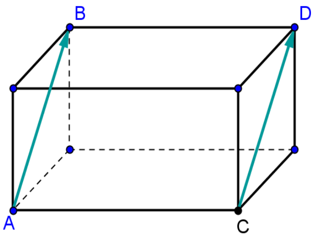
Vecteurs de l'espace — T.S.

Contenus	Capacités attendues	Commentaires
Droites et plans Positions relatives de droites et de plans : intersection et parallélisme.	• Étudier les positions relatives de droites et de plans.	Le cube est une figure de référence pour la représentation des positions relatives de droites et de plans.
Géométrie vectorielle Caractérisation d'un plan par un point et deux vecteurs non colinéaires.		On étend à l'espace la notion de vecteur et les opérations associées. On fait observer que des plans dirigés par le même couple de vecteurs non colinéaires sont parallèles. ■ Il est intéressant de présenter la démonstration du théorème dit « du toit ».
Vecteurs coplanaires. Décomposition d'un vecteur en fonction de trois vecteurs non coplanaires.	• Choisir une décomposition pertinente dans le cadre de la résolution de problèmes d'alignement ou de coplanarité.	On fait percevoir les notions de liberté et de dépendance.
Repérage.	• Utiliser les coordonnées pour : – traduire la colinéarité ; – caractériser l'alignement ; – déterminer une décomposition de vecteurs.	On ne se limite pas à des repères orthogonaux.
Représentation paramétrique d'une droite.		La caractérisation d'un plan par un point et deux vecteurs non colinéaires conduit à une représentation paramétrique de ce plan. ⇄ [SI] Cinématique et statique d'un système en mécanique.

Plusieurs démonstrations, ayant valeur de modèle, sont repérées par le symbole ■. Certaines sont exigibles et correspondent à des capacités attendues. De même, les activités de type algorithmique sont signalées par le symbole ♦.

Introduction : On étend à l'espace la notion de vecteur vue dans le plan et on retrouve donc toutes les règles connues dans le plan

Définition : Soient A et B deux points distincts de l'espace.
- Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a : - pour direction le direction de la droite (AB)
  - pour sens le sens de A vers B
  - pour norme ou longueur la longueur AB
- Si A et B sont confondus, $\overrightarrow{AA}=\overrightarrow{BB}=\vec{0}$.



$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$

Les propriétés suivantes, que vous connaissez dans le plan, restent valables dans tout plan de l'espace.

Propriétés :

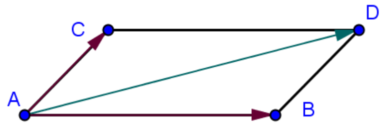
1) Deux vecteurs de l'espace sont **égaux** lorsqu'ils ont la même direction, le même sens et la même longueur.

2) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ équivaut à AB<u>D</u>C est un **parallélogramme**.

3) Soit $\vec{u}$ un vecteur de l'espace et A un point de l'espace. Alors il existe un unique point M tel que $\overrightarrow{AM}=\vec{u}$.

4) **Relation de Chasles** : Quels que soient les points A, B et C de l'espace, on a $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$.

5) **Règle du parallélogramme** : Quels que soient les points A, B et C , on a $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$ où D est le quatrième sommet du parallélogramme AB<u>D</u>C.



I. Vecteurs colinéaires et vecteurs coplanaires (sans coordonnées)

	Vecteurs colinéaires et droites	Vecteurs coplanaires et plans
Définitions	*Tout ce qui figure dans cette colonne est valable aussi bien dans le plan que dans l'espace.* On suppose que $\vec{v}$ est un vecteur non nul. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** si et seulement si il existe un réel k tel que $\vec{u}=k\vec{v}$.	▪ Quatre points A, B, C et D de l'espace sont ***coplanaires*** si et seulement si ils appartiennent à un même plan de l'espace. ▪ Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace non colinéaires. On dit que les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont ***coplanaires*** si et seulement si il existe deux réels x et y tels que $\vec{w}=x\vec{u}+y\vec{v}$. Ceci revient à dire que les points A, B, C et D définis par $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$ et $\vec{w}=\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires. Lorsque le vecteur $\vec{w}$ peut s'écrire $\vec{w}=x\vec{u}+y\vec{v}$, on dit que $\vec{w}$ est une ***combinaison linéaire*** des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
Caractérisation au moyen de points de …	▪ **Caractérisation d'une droite du plan ou de l'espace par deux points distincts.** Soit A et B deux points distincts. La droite (AB) est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires càd l'ensemble des points M pour lesquels il existe un réel x tel que que $\overrightarrow{AM}=x\overrightarrow{AB}$. On dit que le vecteur $\overrightarrow{AB}$ ***dirige la droite*** (AB) ou que c'est un ***vecteur directeur*** de (AB).	▪ **Caractérisation d'un plan de l'espace par trois points non alignés.** Soit A, B et C trois points non alignés. Le plan (ABC) est l'ensemble des points M de l'espace tels que A, B, C et M sont coplanaires càd l'ensemble des points M de l'espace pour lequels qu'il existe deux réels x et y tels que tels que $\overrightarrow{AM}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$. On dit que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ***dirigent le plan*** (ABC) ou que ce sont des ***vecteurs directeurs*** de (ABC).
Caractérisation vectorielle de …	▪ **Caractérisation vectorielle d'une droite du plan ou de l'espace par un point et un vecteur non nul.** A est un point ; $\vec{u}$ est vecteur non nul. Le point M appartient à la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$ $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow$ il existe un réel x tel que $\overrightarrow{AM}=x\vec{u}$. ▪ On note cette droite (A, $\vec{u}$).	▪ **Caractérisation vectorielle d'un plan de l'espace par un point et deux vecteurs non colinéaires.** A est un point de l'espace ; $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non colinéaires. Le point M appartient au plan passant par A et de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AM}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont coplanaires $\Leftrightarrow$ il existe deux réels x et y tels que $\overrightarrow{AM}=x\vec{u}+y\vec{v}$. ▪ On note ce plan $(A,\vec{u},\vec{v})$
Propriétés	▪ Deux droites sont parallèles si et seulement si leurs vecteurs directeurs sont colinéaires. ▪ Les points distincts A, B et C sont alignés $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow$ il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC}$.	▪ Si deux plans sont dirigés par le même couple de vecteurs, ils sont parallèles. ▪ Pour montrer que la droite $d(A,\vec{u})$ est parallèle au plan $P(B,\vec{v},\vec{w})$, il suffit de montrer que les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires.

Remarque : Deux points distincts de l'espace sont toujours alignés (comme dans le plan). Trois points distincts de l'espace sont toujours coplanaires. Dans les exercices on démontrera que des points sont alignés à partir de 3 points ou plus, et on démontrera que des points sont coplanaires à partir de 4 points ou plus.

II. Vecteurs et coordonnées : En 3D rien de nouveau

Pour avoir des coordonnées de vecteurs, il faut une base et pour avoir des coordonnées de points il faut un repère.

	Je me souviens : **Dans le plan (2D)**	**Dans l'espace (3D)**, c'est très semblable
Définitions : Bases **Repères**	▪ On appelle ***base*** de l'ensemble des vecteurs du plan tout couple $(\vec{i},\vec{j})$ de vecteurs du plan non colinéaires. ▪ On appelle ***repère*** du plan, tout quadruplet $(O;\vec{i},\vec{j})$ où O est un point du plan et $(\vec{i},\vec{j})$ est une base du plan. ▪ Le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ est ***orthonormé*** lorsque les vecteurs de la base sont unitaires (càd de norme 1) et deux à deux orthogonaux.	▪ On appelle ***base*** de l'ensemble des vecteurs de l'espace tout triplet $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de vecteurs de l'espace non coplanaires. ▪ On appelle ***repère*** de l'espace, tout quadruplet $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ où O est un point de l'espace et $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est une base de l'espace. ▪ Le repère $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est ***orthonormé*** lorsque les vecteurs de la base sont unitaires (càd de norme 1) et deux à deux orthogonaux.
Coordonnées... d'un vecteur **d'un point**	▪ Étant donné une base $(\vec{i},\vec{j})$ du plan, pour tout vecteur $\vec{u}$ du plan il existe un unique couple $(x;y)$ de réels tels que $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}$. $(x;y)$ sont les ***coordonnées de*** $\vec{u}$ dans la base $(\vec{i},\vec{j})$. ▪ Étant donné un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ du plan, pour tout point M du plan il existe un unique couple $(x;y)$ de réels tels que $\overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}$. $(x;y)$ sont les ***coordonnées de M*** dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.	▪ Étant donné une base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de l'espace, pour tout vecteur $\vec{u}$ de l'espace il existe un unique triplet $(x;y;z)$ de réels tels que $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$. $(x;y;z)$ sont les ***coordonnées de*** $\vec{u}$ dans la base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. ▪ Étant donné un repère $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de l'espace , pour tout point M de l'espace il existe un unique triplet $(x;y;z)$ de réels tels que $\overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$. $(x;y;z)$ sont les ***coordonnées de M*** dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.
Coordonnées... d'un vecteur **du milieu d'un segment** **du centre de gravité d'un triangle**	▪ Si $A\begin{pmatrix}x_A\\y_A\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}x_B\\y_B\end{pmatrix}$ alors $\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix}x_A\\y_A\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{pmatrix}$ ▪ Si I est le milieu de [AB], alors $I\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2}\right)$ ▪ Si G est le centre de gravité du triangle ABC, alors $G\left(\frac{x_A+x_B+x_C}{3};\frac{y_A+y_B+y_C}{3}\right)$	▪ Si $A\begin{pmatrix}x_A\\y_A\\z_A\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}x_B\\y_B\\z_B\end{pmatrix}$ alors $\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix}x_A\\y_A\\z_A\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\\z_B-z_A\end{pmatrix}$ ▪ Si I est le milieu de [AB], alors $I\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2};\frac{z_A+z_B}{2}\right)$ ▪ Si G est le centre de gravité du triangle ABC, alors $G\left(\frac{x_A+x_B+x_C}{3};\frac{y_A+y_B+y_C}{3};\frac{z_A+z_B+z_C}{3}\right)$
Distance	▪ Si le repère est orthonormé	▪ Si le repère est orthonormé

III. Représentations paramétriques de droites et plan de l'espace

L'espace est muni d'un repère $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ non nécessairement orthonormé.

<table>
<tr><th>Droite de l'espace</th><th>Plan de l'espace</th></tr>
<tr><td>
On considère la droite D passant par le point et de vecteur directeur

$\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$.

▪ On a l'équivalence :
$M\in D\Leftrightarrow$ il existe un réel t tel que $\overrightarrow{AM}=t\vec{u}$ càd

$\Leftrightarrow$ il existe un réel t tel que

▪ Le système de relations $\begin{cases}x=x_A+ta\\y=y_A+tb\\z=z_A+tc\end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$ est une représentation paramétrique de la droite D.
On écrit $t\in\mathbb{R}$ pour dire que lorsque t décrit (=parcourt) $\mathbb{R}$, le point M décrit la droite D.

<u>Remarque</u> : Une droite admet une infinité de représentations paramétriques : Il suffit de prendre un autre point de la droite ou un autre vecteur directeur pour obtenir des représentations paramétriques différentes.
</td><td>
On considère le plan P passant par le point et de

vecteurs directeurs et

▪ On a l'équivalence :
$M\in P\Leftrightarrow$ il existe deux réels t et t' tels que

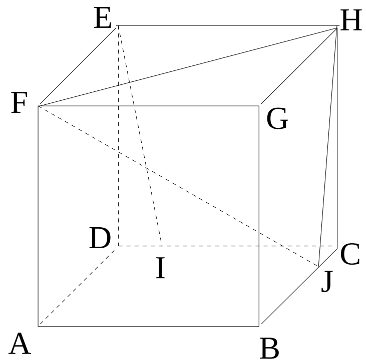
$\Leftrightarrow$ il existe deux réels t et t' tels que

▪ Le système de relations $\begin{cases}x=x_A+ta+t'a'\\y=y_A+tb+t'b'\\z=z_A+tc+t'c'\end{cases}$ $(t,t'\in\mathbb{R})$ est une représentation paramétrique du plan P.
On écrit $t\in\mathbb{R}$ pour dire que lorsque t et t' décrivent $\mathbb{R}$ (=prennent toutes les valeurs possibles dans), le point M décrit le plan P.
<u>Remarque</u> : Un plan admet une infinité de représentations paramétriques : Il suffit de prendre un autre point du plan ou un autre couple de vecteurs directeurs pour obtenir des représentations paramétriques différentes.
</td></tr>
</table>

<u>Remarque</u> : On pourrait de même écrire une représentation paramétrique d'une droite du plan mais dans ce cas on aurait deux coordonnées au lieu de trois.

Sources : Le cours de V. Degos, le cours de J. Mugnier, le cours de A. Reiss Barde, mes souvenirs du cours de M. Nicot (mon professeur de TS), le manuel Repères, le manuel Déclic...et j'en oublie !

♠ Exercice 1.



ABCDEFGH est un cube.

I et J sont les points définis par $\overrightarrow{DI}=\frac{1}{4}\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{BJ}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$.

Montrer que la droite (EI) est parallèle au plan (FHJ).

Solution : Exprimons $\overrightarrow{HF}$, $\overrightarrow{HJ}$ et $\overrightarrow{EI}$ en fonction de $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{DC}$.

$\overrightarrow{EI}=\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DI}=-\overrightarrow{DE}+\frac{1}{4}\overrightarrow{DC}$; $\overrightarrow{HF}=\overrightarrow{HE}+\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{DC}$; $\overrightarrow{HJ}=\overrightarrow{HC}+\overrightarrow{CJ}=\frac{1}{4}\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{DE}$

Cherchons des réels x et y tels que $\overrightarrow{EI}=x\overrightarrow{HF}+y\overrightarrow{HJ}$.

On a $x\overrightarrow{HF}+y\overrightarrow{HJ}=x\overrightarrow{DA}-x\overrightarrow{DC}+\frac{y}{4}\overrightarrow{DA}-y\overrightarrow{DE}=(x+\frac{y}{4})\overrightarrow{DA}-x\overrightarrow{DC}-y\overrightarrow{DE}$

et $\overrightarrow{EI}=\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DI}=-\overrightarrow{DE}+\frac{1}{4}\overrightarrow{DC}$.

Il suffit donc que $\begin{cases} x+\frac{y}{4}=0 \\ -x=\frac{1}{4} \\ -y=-1 \end{cases}$ soit $\begin{cases} x=-\frac{1}{4} \\ y=1 \end{cases}$.

On a donc $\overrightarrow{EI}=-\frac{1}{4}\overrightarrow{HF}+\overrightarrow{HJ}$, les vecteurs $\overrightarrow{HF}$, $\overrightarrow{HJ}$ et $\overrightarrow{EI}$ sont coplanaires, et la droite (EI) est donc parallèle au plan (HJF).